Les verres Kikagaku - Clôture

幾何学のグラス

Mars 2026

Jérémie Brieussel jeremie.brieussel@umontpellier.fr

Ce texte de clôture vise à proposer une résolution du problème des verres Kikagaku. Il est à destination des élèves et des enseignants de tous les niveaux de la 6ème à la Terminale. Le but est d'accompagner les classes vers une clôture de la résolution collaborative.

Toutes les classes sont à féliciter pour leur investissement ! Il y a eu beaucoup d'échanges et de nombreuses propositions pertinentes ! C'était un grand plaisir de lire vos travaux !

Ce document de clôture n'est pas *la* solution du problème. C'est un retour sur les propositions faites par les différentes classes ayant participé. Nous allons maintenant présenter les éléments mathématiques utilisés par les différentes classes pour résoudre autant que possible le problème.

Notre objectif est de permettre à la chaine hôtelière Kikagaku de faire son choix en toute connaissance de cause.

Ce document présente les solutions d'un point de vue expert. Il peut être lu à tout niveau, du moins certaines parties, sachant que les éléments mathématiques ne sont pas aussi détaillés que pour un enseignement.

1 Rappel de l'énoncé et de la relance

IRES de Montpellier – 2025-2026
Résolution Collaborative de Problème

Jérémie Brieussel
jeremie.brieussel@umontpellier.fr

Les verres Kikagaku

La chaine hôtelière japonaise Kikagaku souhaite commander des verres pour les chambres et les restaurants du groupe. Elle souhaite acheter un modèle de verres ayant une contenance de 20cl. Les besoins sont de 1000 verres pour chaque établissement de la chaine. Afin de réduire l'espace de stockage, elle voudrait pouvoir stocker ces 1000 verres dans un placard peu volumineux. D'après le fabricant de verres, il est nécessaire que l'épaisseur de verre soit d'au moins 2mm pour en assurer la solidité.

Pouvez vous proposer une forme modèle de verre la plus adéquate possible pour la chaine hôtelière Kikagaku, lui permettant de réduire l'espace de stockage ?

Les verres Kikagaku

Bonjour à toutes et tous !

Félicitations pour votre investissement ! Vous vous êtes posé beaucoup de questions et vous avez proposé des réponses variées et souvent pertinentes. Nous sommes sûrs que vous arriverez à proposer à la chaine hôtelière Kikagaku une forme de verre qui permettra un rangement aussi compact que possible !

Nous avons demandé à la chaine hôtelière plus d'informations, afin de répondre de manière précise à vos questions.

Les précisions de la chaine Kikagaku

La chaine Kikagaku souhaite acheter un modèle unique de verre pour fournir tous ses hôtels et leurs restaurants. Sa priorité est de pouvoir réduire au maximum le volume de stockage à raison de 1000 verres par hôtel. La chaine approuve votre suggestion, faite par de nombreuses classes, d'empiler les verres pour réduire le volume. Cependant, les verres doivent être d'usage pratique pour les clients et pour le service.

L'esthétique de la forme du modèle n'est pas un critère retenu.

Les espaces de stockage et le volume des verres

Suite à vos questions nous avons insisté pour obtenir des informations sur l'espace de stockage. Les verres seront stockés dans des placards dont les étagères sont suffisamment spacieuses, mais dont les dimensions peuvent différer suivant les hôtels. Comme ces étagères doivent stocker d'autres matériels, la chaine souhaite un rangement aussi compact que possible. Les serveuses et serveurs s'accordent à dire que des piles de verres de plus de 40cm de haut ne sont pas pratiques.

Vous êtes nombreux à vous inquiéter du risque de renverser du liquide si le verre de 20cl est rempli à raz-bord. Pas d'inquiétude, car la chaine Kikagaku sert à ses clients des boissons de 18cl maximum.

Notre objectif

Nous sommes libres de suggérer n'importe quelle forme de verre. Pour cette forme, nous devons d'une part garantir à la chaine Kikagaku que chaque verre peut contenir 20cl de liquide. D'autre part, nous devons être capables d'estimer le volume nécessaire pour stocker 1000 verres ayant cette forme. Il est possible de les empiler, ce qui réduit le volume de stockage, à condition que les piles ne dépassent pas 40cm de hauteur.

En résumé, nous devons proposer une forme de verre contenant 20cl permettant de stocker 1000 verres dans un volume minimal. Plus le volume de stockage est faible, plus votre proposition de forme sera intéressante.

Nous avons hâte de lire vos travaux. Pensez à les déposer le plus souvent possible sur le forum pour échanger avec vos classes partenaires !

Jérémie Brieussel et l'équipe Resco

jeremie.brieussel@umontpellier.fr

2 Notre programme d'étude

Notre objectif est donc de proposer une forme de verre garantissant les deux points suivants :

- chaque verre doit pouvoir contenir 20cl,
- le volume global de stockage de 1000 verres doit être aussi petit que possible.

De plus, si nous sommes amenés à empiler les verres, les piles ne doivent pas dépasser 40cm vu la demande des serveuses et serveurs.

Commençons par lister les formes de verre auxquelles on peut penser :

- verre cylindrique :

- verre cubique ou plus généralement parallélépipédique :

- le verre “de la cantine”, composé de deux cylindres superposés, celui du dessous étant de rayon plus petit :

- certaines cantines peuvent avoir des verres de forme différentes, un peu plus complexes à décrire géométriquement :

  Nous n'allons pas décrire ces formes complexes. C'est possible, mais cela nécessite des outils plus avancés que ce qui est disponible en collège et lycée. Surtout ces formes nous évoquent une autre forme classique de verre :

- verre “en cône tronqué”, notamment les célèbres verres Ecocup :

Cette forme inspire aussi le cas où la base serait carrée.

- verre “tronc de pyramide à base carrée” :

Et on peut jouer avec cette forme en variant la base.

- verre “en pyramide à base hexagonale tronquée” :

Il n’y a pas de limite à la variété des formes possibles.

- Verres divers :

- Verre pomme :

Pour chacune de ces formes, nous devons résoudre deux problèmes de géométrie distincts.

1. **Problème du volume** : nous devons garantir une contenance de 20cl. Cette contenance dépend des dimensions exactes de la forme : longueur, hauteur, diamètre, angle...
2. **Problème d’empilement** : prendre le moins de place possible dans un placard. Ce problème se décompose en deux sous-problèmes distincts.
   a) **Problème de l’emboitement** : on peut mettre des verres les uns sur les autres jusqu’à 40cm de hauteur. Combien de verres peut-on mettre dans une pile ?
   b) **Problème du placement** : les piles seront placées sur les étagères du placard. Selon la forme de la base, il peut y avoir des espaces vides, et on souhaite les réduire pour compacter le rangement.

Nous avons donc trois problèmes pour au moins huit types de verre... Cela fait beaucoup ! Et effectivement, en lisant toutes vos contribution sur le forum, on se rend compte que vous avez beaucoup travaillé ! Chacun de ces problèmes a été résolu par au moins une classe ! Mettons nous au travail avec courage et méthode...

3 Boite à outils

Chacun de ces trois problèmes nécessite des outils géométriques. La géométrie, en particulier dans l'espace, est délicate. Pour appréhender les formes, il est utile de pouvoir les manipuler, et les représenter.

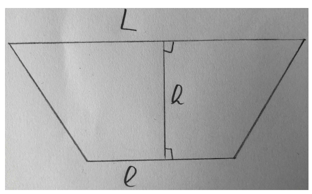
3.1 Manipulation et représentation

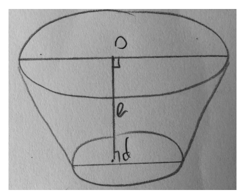
Prendre en main des verres de formes variées, les observer, les représenter par le dessin sont des étapes essentielles pour comprendre notre problème. Découper des patrons, même si cela n'est pas indispensable pour la résolution, force à comprendre la structure géométrique de chacune des formes envisagées.

Pour comprendre les possibilités d'emboitement notamment, il n'y a pas vraiment de théorie, de théorème ou de technique mathématique. Il faut tester, et comprendre où se trouveront les limitations, en faisant attention que l'épaisseur du verre joue un rôle.

Il s'agit ensuite de faire des représentations sur le papier, afin de mieux comprendre quelles grandeurs géométriques sont en jeu (longueurs, angles...) Les représentations en perspective sont difficiles mais fournissent une bonne compréhension. Les représentations en coupe sont plus faciles à manipuler pour les calculs, mais nécessitent une vision de l'espace préalable.

Dans tous les cas, il est souhaitable de multiplier les représentation, et de faire attention. Par exemple, l'aire d'un trapèze isocèle est donnée par la hauteur multipliée par la largeur moyenne : $h\frac{L+\ell}{2}$.





Comme la coupe d'un cône tronqué est un trapèze, on pourrait penser que le volume du cône est le produit de la hauteur par l'aire moyenne $h\frac{(D/2)^2+(d/2)^2}{2}$, mais ce n'est pas le cas comme nous allons le voir bientôt.

3.2 Comment déterminer des volumes ?

Une des difficultés rencontrées consiste à déterminer le volume d'un verre connaissant sa forme. Rappelons d'abord les conversions des unités :

$$1L = 1dm^3 = 1000cm^3 = 100cL \quad \text{donc} \quad 1cL = 10cm^3.$$

3.2.1 Mesure

Prenons un verre en main, par exemple celui de la cantine, ou bien un verre en plastique ou carton pour éviter les risques de casse. On peut mesurer toutes les dimensions. Déterminer son volume n'est pas difficile. Le plus simple est de remplir le verre à raz bord avec de l'eau et de verser dans un doseur. On obtient ainsi le volume contenu.

Par exemple ma tasse de café a une forme cylindrique, dont le diamètre est 7,6cm et la hauteur 7cm. Elle contient à peu près 31cL.

3.2.2 Homothétie

Le problème avec ma tasse, c'est qu'elle est inutile pour la chaine Kikagaku. Son volume contenu est bien trop grand. Toutefois, on comprend bien que si on pouvait la faire diminuer de taille, il y aurait une "forme" avec les mêmes proportions, mais avec un volume d'exactement 20cL.

Cette forme serait un cylindre ayant un diamètre D et une hauteur h. Pour les trouver, il faut trouver le coefficient λ tel que $\lambda D = 7,6cm$ et $\lambda h = 7cm$ et telle que $\lambda^3 20cL = 31cL$. La puissance 3 peut être difficile à deviner pour un cylindre, mais facile à comprendre pour un cube. Si on remplace le côté c par un côté λc, alors on remplace le volume $v = c^3$ par $(c\lambda)^3 = \lambda^3 c^3 = \lambda^3 v$. Il reste à raisonner en imaginant ma tasse remplie de petits cubes de 1mm de côté...

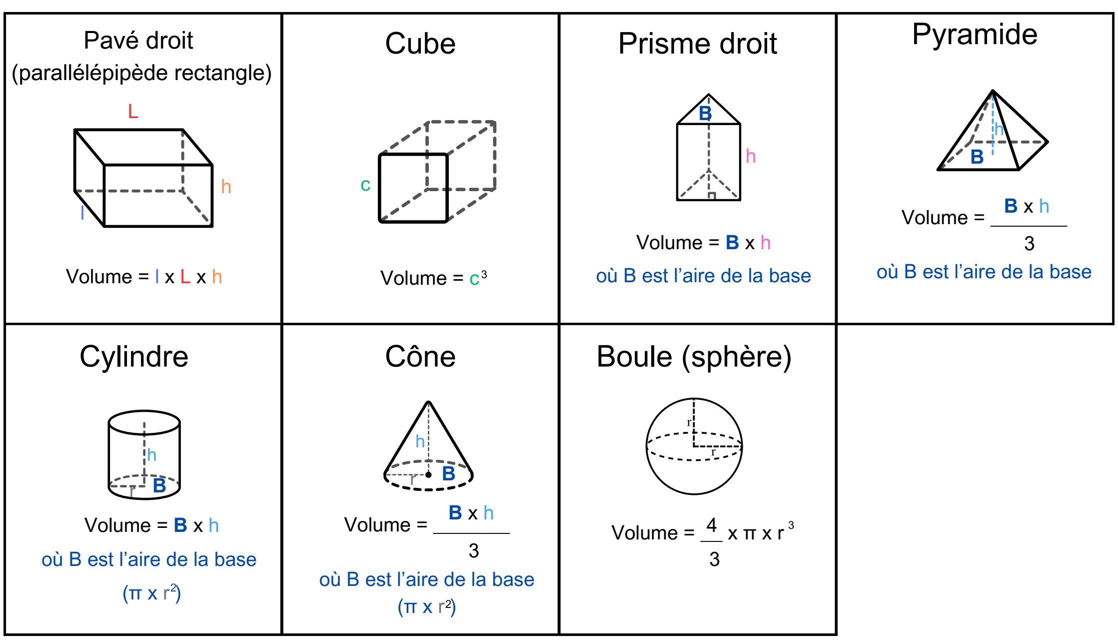
Maintenant qu'on a compris, encore faut-il résoudre l'équation $20\lambda^3 = 31$, soit $\lambda^3 = \frac{31}{20}$, ou encore $\lambda = \sqrt[3]{15,5} \approx 1,16$ (nombre sans unité).

Ainsi, si l'on prend une tasse cylindrique, avec $D = \frac{7,6}{1,16} \approx 6,5cm$ et $R = \frac{7}{1,16} \approx 6,0cm$, alors elle contiendra un volume de 20cL !

À condition de bien utiliser le facteur λ pour modifier toutes les longueurs intervenant dans la description, cela peut s'appliquer à toutes les formes, y compris celle-là, même s'il faut reconnaitre qu'elle sera peu pratique à empiler...

3.2.3 Les formules

Les formes auxquelles nous avons pensées et qui semblent se prêter à un rangement compact sont des formes géométriques assez particulières, avec beaucoup de symétries, et pour lesquelles nous pouvons utiliser de splendides formules !

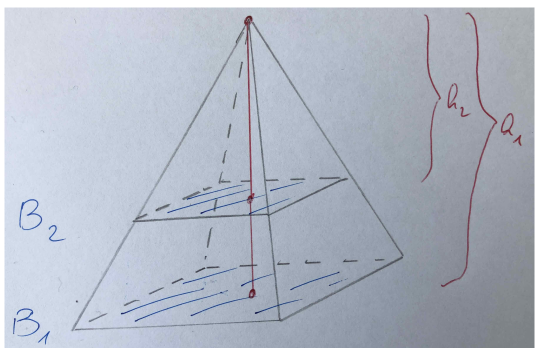


Le tableau ci-dessus contient sept formules, dont trois sont essentielles.

- Le volume des boules (classique mais pas facile à justifier, moins encore à deviner !) ne nous servira pas vraiment.
- Le volume du prisme droit : il suffit de multiplier l'aire B de la base par la hauteur h. Cette formule est très utile. Elle permet d'obtenir
  1. la formule pour le pavé droit, car la base est un rectangle de largeur ℓ et longueur L,
  2. le cube, cas particulier du pavé droit où $\ell = L = h = c$,
  3. le cylindre, dont la base est un cercle de rayon r.
- Le volume d'une pyramide $\frac{B \times h}{3}$, quelle que soit la forme de la base. C'est utile en particulier pour une pyramide à base carrée, ou à base un disque (ce qu'on appelle un cône).

La formule pour la pyramide peut se démontrer en intégrant la fonction $x \mapsto x^2$. Pour une base carrée, on peut aussi l'obtenir par des découpages de cubes.

Il nous manque les formules pour un cône tronqué ou une pyramide tronquée. Mais en fait c'est simple, car une pyramide tronquée peut s'obtenir à partir d'une grande pyramide : il suffit d'enlever une pyramide plus petite.



Ainsi avec le dessin ci-dessus, on a les formules

$$\text{Volume} = \frac{B_1 \times h_1}{3} - \frac{B_2 \times h_2}{3} \tag{1}$$

Notons que l'on a aussi

$$\frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2, \tag{2}$$

puisque les longueurs (par exemple celles des côtés pour un polygone, ou bien rayon et circonférence pour un cercle) de la base B_1 s'obtiennent par celles de B_2 en multipliant par h_1/h_2. La base ayant dimension 2, son aire s'obtient en multipliant par $(h_1/h_2)^2$. Par exemple pour un rectangle, on a

$$B_1 = L_1 \times \ell_1 = L_2 \frac{h_1}{h_2} \times \ell_2 \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 L_2 \ell_2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 B_2.$$

Il s'agit là encore d'une homothétie, mais en dimension 2 cette fois.

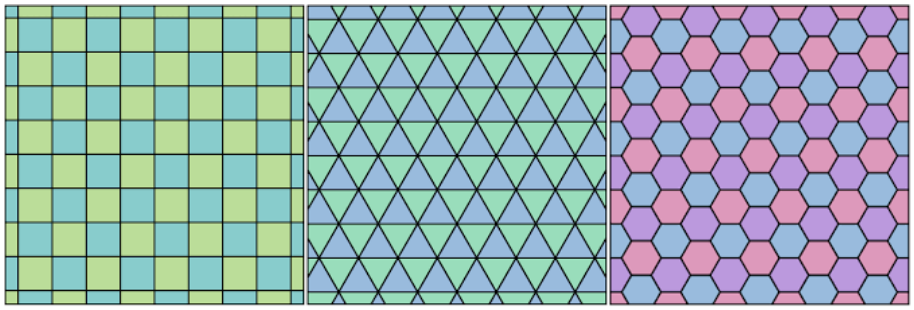
Les formules (1) et (2) sont valides pour un cône tronqué, quelle que soit la forme de sa base : carré, disque, rectangle, triangle, hexagone, polygone quelconque, etc.

3.3 Problème de placement et densité maximale des disques

Dans cette partie, je souhaite anticiper sur le problème du placement des piles de disques. Supposons que nous avons des piles de verres ayant une certaine hauteur convenable, et que nous allons ranger ces piles sur une étagère. On va ranger ces piles de la manière la plus “serrée” possible afin de minimiser le volume occupé.

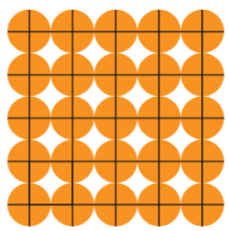
Pour cela, observons la forme de la pile vue du dessus. C'est une forme géométrique, qui sera souvent celle de la base de notre verre, ou bien la base du verre mis à l'envers (c'est souvent plus stable et s'il y a de la poussière, elle s'accumule à l'extérieur du verre).

Si cette forme est un carré, ou plus généralement un parallélogramme, un triangle ou un hexagone régulier, on peut placer nos verres de sorte qu'il n'y ait pas d'espace vide.



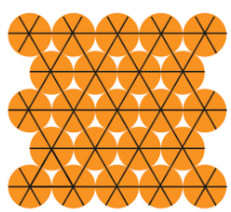
En fait, il y aura un petit peu d'espace au bord pour les hexagones et les triangles, mais cela dépend des dimensions exactes des étagères utilisées et nous n'avons pas d'information à ce sujet.

Si la forme de notre pile vue d'en haut est un disque, alors on perd de la place. La solution la plus simple est de placer un verre dans chaque carré d'un placement régulier de carré.



On a alors dans chaque carré de côté c un disque de diamètre c. On a perdu de l'espace, car le carré a une aire de c^2, alors que le disque a une aire de $\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}c^2 \approx 0,79c^2$. Il y a donc environ 21% d'espace inutile.

Cette solution est simple, mais il y a plus malin. On peut placer les centres des disques aux sommets d'un pavage hexagonal régulier (en nid d'abeille). Comme cela :



Pour déterminer le pourcentage d'espace perdu, le plus simple est de regarder dans un triangle équilatéral. Chacun de ces triangles a un côté $c = 2r$, double du rayon des disques. Sa hauteur est alors $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ et donc son aire de $(c \times h)/2 = c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Par contre, la surface utile de chaque triangle (partie en orange) est la réunion de 3 sixièmes de disques, soit un demi disque de rayon $r = \frac{c}{2}$. La surface utile par triangle est donc $\pi r^2/2 = \frac{\pi}{8}c^2$. La proportion de surface utile est donc

$$\frac{\frac{\pi}{8}c^2}{c^2\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907.$$

C'est-à-dire $90,7\%$ de surface utile. C'est ce placement qui donne le pourcentage de surface utile maximal possible.

Ce résultat a été deviné par le mathématicien français Lagrange au XVIIIème siècle. Il l'a prouvé pour des pavages réguliers, et on sait aujourd'hui que c'est le meilleur placement possible (même avec des placements irréguliers sans symétries). Le problème analogue en dimension 3 est difficile, résolu complètement par Thomas Hales en 1998. Pour des dimensions supérieures (je sais que cela n'est compréhensible que par les enseignants et par les élèves qui pourraient lire ce document), on ne sait pas quel est l'empilement le plus dense, sauf en dimension 8 et 24, d'après les travaux de Maryna Viazovska, mathématicienne ukrainienne qui a reçu la médaille Fields en 2022.

Notons cependant que ces taux de remplissages ne sont que des taux théoriques, valables seulement pour des surfaces très grandes, car en pratique il faudrait tenir compte des problèmes de bords. Que ce soit avec des triangles, des hexagones ou des disques, on perdra forcément de l'espace aux bords des placards, et il faudrait en tenir compte. Nous ne pouvons pas vraiment le faire ici car on ignore la dimension des placards. Il est toutefois possible de conseiller des dimensions de placards adaptées aux formes de verres comme l'ont fait certaines classes.

4 Étude par forme

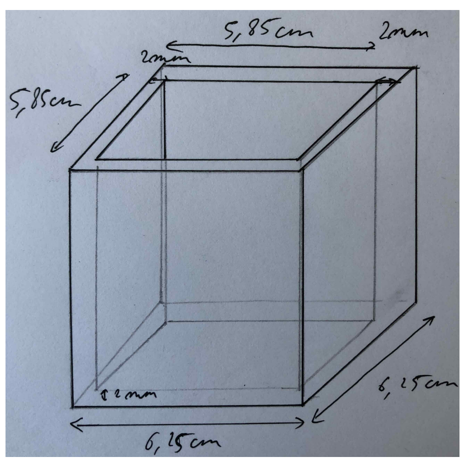
Maintenant que nous sommes équipés, nous pouvons commencer une étude systématique.

4.1 Verres cubiques

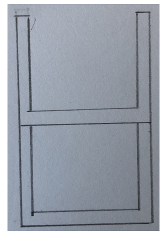
Commençons par la forme la plus simple d'un point de vue géométrique : le cube. Nous voulons un cube de 20cL=200cm^3 de volume. Son côté c exprimé en cm doit donc satisfaire l'équation

$$c^3 = 200 \quad \text{soit} \quad c = \sqrt[3]{200} \approx 5,85cm.$$

Nous devons rajouter l'épaisseur du verre, soit 2mm=0,2cm d'après les données du problème, au fond du verre et sur les côté. Notre verre aura donc une forme définitive d'un parallélépipède rectangle, ayant des côtés latéraux de longueur $6,25cm$ (base carrée) et une hauteur de 6,05cm.



L'empilement de ces verres est très mauvais car ils ne peuvent pas se glisser les uns dans les autres. L'empilement prend beaucoup de place et est très instable.



Faisons quand même un calcul pour voir le volume de rangement nécessaire. Imaginons que nous pouvons empiler 6 verres pour une hauteur de $6,05 \times 6 = 36,30cm$ (si on rajoute un septième verre, cela dépasserait 40cm). Alors on peut ranger 6 verres sur une pile qui occupe un carré de 6,25cm de côté, soit $6,25^2 \approx 39,06cm^2$. Il faudra $1000/6 \approx 167$ piles.

En théorie cela représente $39,06 \times 167 \approx 6523cm^2$. C'est-à-dire que cela rentrerait sur une étagère faisant $1m$ de long, $65cm$ de profondeur et $40cm$ de haut. Mais en fait pas exactement, car 167 étant un nombre premier, quelque soit le nombre que l'on en met dans chaque rangée, il y aura forcément une rangée incomplète (sauf à simplement aligner les piles).

Une manière de mieux occuper l'espace serait de choisir la hauteur de telle sorte qu'une pile de 6 verres fasse 40cm de haut, soit des verres de $6,6cm$ de haut. On cherche alors une base carrée à notre parallélépipède rectangle. Avec un fond de 2mm, cela fait une hauteur utile de 6,4cm. Il faudrait un côté intérieur c avec $c^2 \times 6,4 = 200cm^3$ soit $c \approx 5,6cm$. Avec l'épaisseur de verre sur les deux bord, on obtient un carré de 6cm de côté. Chaque pile occupe alors $6 \times 6 = 36cm^2$ de surface d'étagère. Il suffit alors de $167 \times 36 = 6012cm^2$ de surface. On a amélioré un petit peu.

4.2 Verres cylindriques

On devine tout de suite qu'il y aura des problèmes d'empilement comme avec les verres cubiques, mais faisons rapidement les calculs avant de voir ce que donnent d'autres formes plus complexes.

Commençons tout de suite par faire des piles de 6 verres ayant hauteur $6,6cm$ dont $6,4cm$ de hauteur utile. On veut alors un rayon utile r, dont l'aire de la base en forme de disque sera πr^2, et le volume $6,4 \times \pi r^2 = 200cm^3$. On résout $r \approx 3,16cm$. Le diamètre utile est de $6,32cm$ et donc le diamètre effectif de $D = 6,72cm$ en tenant compte de l'épaisseur de verre.

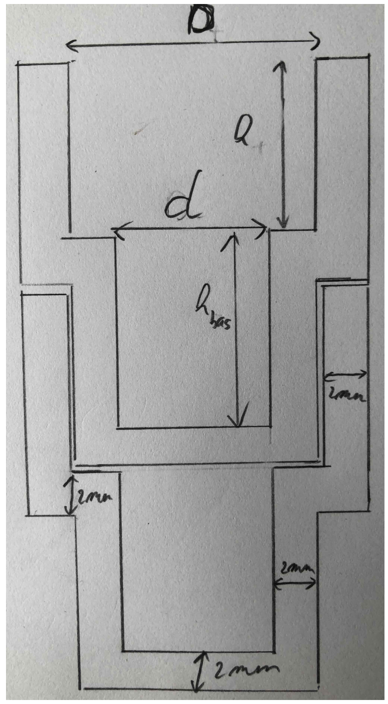
On veut maintenant évaluer la surface de placard occupée par nos piles de verre. Chaque pile occupe une aire de $\pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4} \approx 35,47cm^2$. Il nous faut 167 piles, ce qui représente une surface de $167 \times 35,47 = 5923cm^2$. Mais nous devons encore tenir compte du taux de remplissage optimal de $90,7\%$ que nous avons vu lors de la discussion en section 3.3. Les verres occuperont donc une surface de $\frac{5923}{0,907} \approx 6530cm^2$. C'est un peu moins bien qu'avec nos verres parallélépipédiques...

À nouveau, il est difficile de savoir le volume exacte en pratique car le placement dépend des dimensions du placard, notamment au bords.

4.3 Verres "de cantine" à double cylindre

Étudions maintenant le verre "à double cylindre" que nous trouvons dans de nombreuses cantines.

Ce verre présente l'avantage de pouvoir s'empiler facilement, de manière stable. On devine que cela va permettre un gain de place important. Nous devons maintenant le calculer. Notons D et h le diamètre et la hauteur utiles du cylindre supérieur, et d, h_{bas} pour le cylindre inférieur. On peut tracer le dessin en coupe:



Nous avons donc quatre longueurs possibles pour déterminer la forme du verre. Néanmoins, une observation montre que nous devons choisir $d \leq D - 0,4cm$, sinon le cylindre du dessous ne pourra pas s'emboiter dans le cylindre du dessus à cause de l'épaisseur de verre. Bien sûr, il vaut mieux choisir $d = D - 0,4cm$, sinon nous "perdons du volume utile". (En pratique, il faut une petite marge d'erreur, mais c'est difficile d'estimer laquelle sans une connaissance précise de verriers.)

De plus, nous avons aussi tout intérêt à prendre $h = h_{\text{bas}}$, sans quoi il y aurait "de l'espace perdu dans l'empilement". (Je vous laisse réfléchir à justifier cela précisément, ce n'est pas si simple...) Nous fixons donc

$$d = D - 0,4cm \quad \text{et} \quad h_{\text{bas}} = h.$$

La hauteur totale du verre sera alors de $h_{\text{ext}} = 2h + 0,2cm$ et le diamètre extérieur sera $D_{\text{ext}} = D + 0,4cm$. Une pile de k verres fera une hauteur de

$$h_{\text{ext}} + (k-1)(h + 0,2cm) = k(h + 0,2) + h \text{ en cm.} \tag{3}$$

Le volume utile du cylindre est la somme des volumes du cylindre du haut et de celui du bas, soit

$$\text{Volume} = \pi h \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \pi h_{\text{bas}} \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi h \left(\frac{D^2}{2} - 0,2D + 0,04\right).$$

Nous devons donc choisir h et D de telle sorte qu'ils satisfassent l'équation algébrique

$$\pi h \left(\frac{D^2}{2} - 0,2D + 0,04\right) = 200cm^3. \tag{4}$$

Il y a plusieurs méthodes possibles suivant le niveau d'avancement des élèves.

4.3.1 On choisit D et on essaye.

Le plus simple est de se donner D et de résoudre l'équation en h. Par exemple, pour $D = 6cm$, on trouve $h \approx 3,78cm$. Cela fait une hauteur de verre $h_{\text{ext}} = 7,76cm$. Si nous faisons une pile de 9 verres, sa hauteur sera $39,6cm$. Nous avons de la chance, c'est presque 40cm !

Le diamètre extérieur étant $D_{\text{ext}} = 6,4cm$, la surface occupée par une pile a une aire de $\frac{\pi D_{\text{ext}}^2}{4} \approx 32,16cm^2$. Nous aurons 111 piles de 9 verres et un verre tout seul, soit 112 piles. Elles occuperont donc une surface utile mesurant $112 \times 32,16 \approx 3650cm^2$. Reste à multiplier par le taux de remplissage optimal $\frac{3650}{0,907} = 4025cm^3$. Nous progressons !

4.3.2 On choisit le nombre de verres dans la pile.

Soit $k \geq 1$ le nombre de verres dans la pile. L'équation (3) permet de déterminer la hauteur du verre de sorte que la pile fasse exactement 40cm. On trouve

$$h_k = \frac{40 - 0,2k}{k+1}.$$

Notons que si k dépasse $40/0,2 = 200$ la hauteur serait négative. C'est simplement parce qu'au delà de ce seuil, l'épaisseur de verre force un pile de k verre à dépasser 40cm.

L'équation (4) permet alors de trouver la diamètre du verre de sorte que le volume soit 20cL. On obtient l'équation

$$D_k^2 - 0,4D_k + 0,08 = \frac{400}{\pi h_k} \quad \text{soit} \quad D_k^2 - 0,4D_k + \left(0,08 - \frac{400}{\pi h_k}\right) = 0.$$

Comme c'est une équation de degré 2, on sait la résoudre explicitement, avec la formule du discriminant. On obtient

$$D_k = \frac{0,4 \pm \sqrt{0,4^2 - 4(0,08 - \frac{400}{\pi h_k})}}{2} = 0,2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1600}{\pi h_k} - 0,16} = 0,2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1600(k+1)}{\pi(40-0,2k)} - 0,16}$$

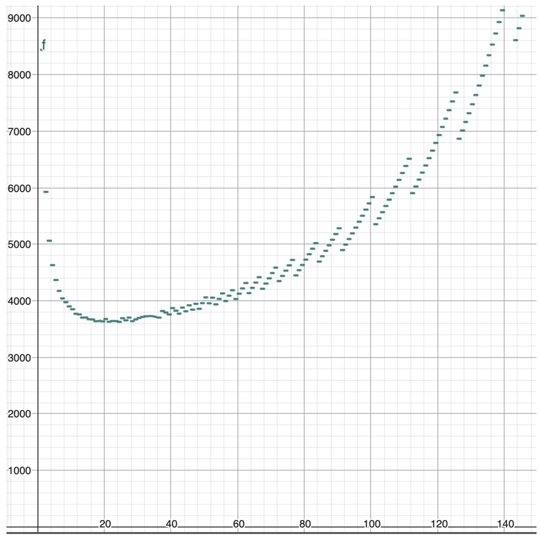
C'est la solution avec + qu'il faut retenir car le diamètre doit être supérieur à l'épaisseur de verre, sans quoi le cylindre du dessous aurait un diamètre négatif. On peut donc déterminer la surface au sol occupée par une pile de 40cm comportant k verres, ce sera

$$\pi \frac{D_{\text{ext}}^2}{4} = \pi \frac{(D_k + 0,4)^2}{4}$$

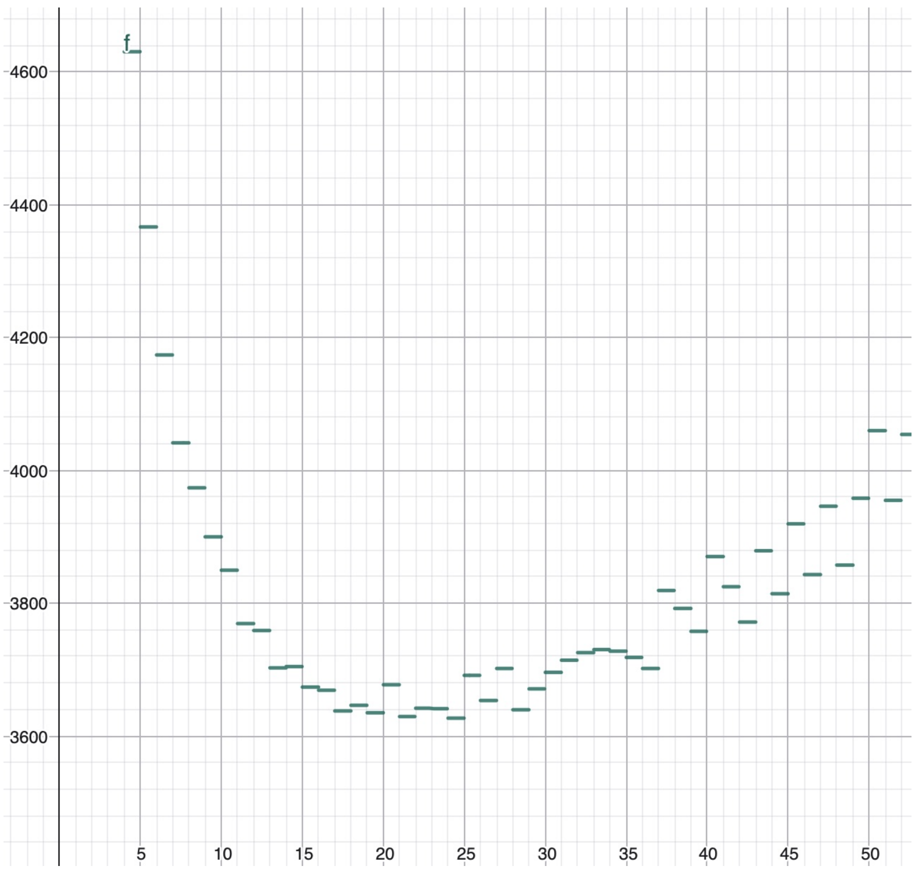
Et il nous faudra $\lfloor \frac{1000}{k} \rfloor$ piles où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x. L'aire occupée est donc, en tenant compte une fois de plus du taux de remplissage de $90,7\%$ car la base est circulaire,

$$\text{Aire} = \frac{\pi}{0,907} \left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor \frac{(D_k + 0,4)^2}{4}$$

Le plus simple est de tracer cette suite. On obtient



Si l'on zoome dans la partie centrale:



Il apparait que l'option qui permet un stockage avec le moins de place est de faire des piles de k=24 verres, avec un volume $V_{24} \approx 3627cm^3$. Dans ce cas, on aura

$$h_{24} = 1,4cm \quad \text{et} \quad D_{22} = 9,71cm.$$

Cela signifie que le verre aurait une hauteur totale $h_{\text{ext},24} = 3cm$ et un diamètre extérieur de $D_{\text{ext},24} = 10,11cm$. Si l'on regarde ce que cela représente, on réalise que cette forme est plus proche d'une soucoupe que d'un verre à proprement parler.

Si on choisit de faire des piles de 11 verres, alors $V_{11} \approx 3769cm^3$. Dans ce cas, on aura

$$h_{11} = 3,15cm \quad \text{et} \quad D_{11} = 6,55cm.$$

Cela signifie que le verre aurait une hauteur totale $h_{\text{ext},11} = 6,5cm$ et un diamètre extérieur de $D_{\text{ext},11} = 6,95cm$. C'est déjà plus large que haut, mais la forme ne devrait pas choquer les client.es. De plus, l'espace de stockage est déjà nettement amélioré comparé aux verres cubiques ou cylindriques.

On rencontre ici une situation où la mathématisation fournit une solution certes optimale numériquement, mais inacceptable socialement. Les client.es seraient choqué.es qu'on leur serve à boire dans des sortes de soucoupes de hauteur $3cm$ et largeur $10cm$. Nous devons donc exclure cette proposition, ou du moins alerter la chaine hôtelière Kikagaku sur ce point !

Nous pourrions, comme nous l'avons vu sur les questions de placement, remplacer la forme de verre "en double cylindre", par une forme de verre en "double parallélépipède rectangle à base carrée". Cela permet de supprimer le facteur d'occupation de $90,7\%$ et de le remplacer par 100%. Il s'agit de reprendre les calculs ci-dessus. Comme ce n'est pas si différent et cela n'apporte pas beaucoup de nouveautés à notre discussion, je vous laisse faire.

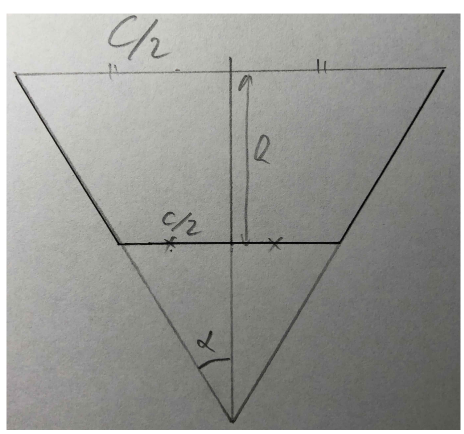
4.4 Verres en pyramides tronquées

On se penche maintenant sur les verre en forme de pyramide à base carrée. Comme celui-ci :

La forme intérieure est déterminée par 3 mesures : le côté C du carré en haut, le côté c du carré en bas, et la hauteur h. Notons aussi l'angle α que fait le bord du verre avec la verticale. Ces quatre grandeurs sont reliées par l'équation

$$\frac{C-c}{2h} = \tan\alpha.$$

Pour déterminer la volume de la pyramide tronquée, il faut trouver la hauteur H de la pyramide entière. Le dessin en coupe suivant montre que $\frac{H}{H-h} = \frac{C/2}{c/2} = \frac{C}{c}$. Cela équivaut à $\frac{h}{H} = 1 - \frac{c}{C}$, ou encore $H = \frac{hC}{C-c}$.



Le volume de la pyramide tronquée est donné par

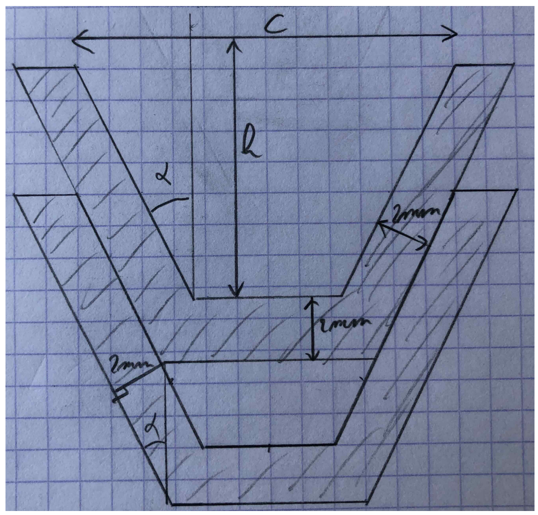
$$\text{Volume} = \frac{C^2H}{3} - \frac{c^2(H-h)}{3} = \frac{H}{3}\left(C^2 - \frac{c^3}{C}\right) = 200cm^3.$$

On peut le réécrire, en utilisant $H = \frac{hC}{C-c}$, sous la forme

$$\text{Volume} = \frac{hC}{3(C-c)}\left(C^2 - \frac{c^3}{C}\right) = \frac{h(C^3-c^3)}{3(C-c)} = \frac{h}{3}(C^2+Cc+c^2) = 200cm^3. \tag{5}$$

Voyons maintenant comment nous pouvons empiler les verres en forme de pyramide à base carrée. Notons η la hauteur entre deux verres, que l'on exprime en cm. On a d'après l'étude du dessin ci-dessous :

$$\sin\alpha = \frac{0,2}{\eta}$$



De plus, le dessin précédent montre que $\sin\alpha = \frac{C/2}{\sqrt{H^2+(C/2)^2}} = \frac{C}{\sqrt{4H^2+C^2}}$. D'où l'on déduit que

$$\frac{2}{\eta} = \frac{C}{\sqrt{4H^2+C^2}} \quad \text{soit} \quad \eta = \frac{2\sqrt{4H^2+C^2}}{C} \quad \text{ou encore} \quad \eta = 2\sqrt{1+\frac{4h^2}{(C-c)^2}}.$$

Ainsi, une tour de k verres empilés mesure $h + 0,2 + (k-1)\eta$ centimètres de haut. En respectant la hauteur maximale de 40cm, on peut choisir $k = k(\eta)$ satisfaisant

$$(k-1)\eta \leq 40 - h - 0,2 < k\eta \quad \text{soit} \quad k = \left\lceil \frac{40-h-0,2}{\eta} \right\rceil,$$

où $\lceil x \rceil$ désigne l'arrondi de x à l'entier supérieur ou égal. Il faudra alors faire $\lfloor \frac{1000}{k} \rfloor$ piles de k verres. La surface occupée par une pile de verres est celle d'un carré de $C + 0,4$ centimètres de côté. (On pourrait discuter du fait que l'angle modifie légèrement cette distance, mais pour simplifier un peu n'en tenons pas compte.)

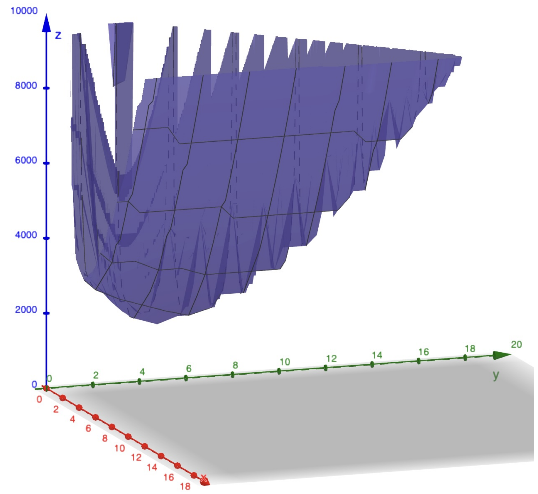
Exprimons cette aire en fonction de C et c. On a

$$\text{Aire} = (C+0,4)^2 \left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor.$$

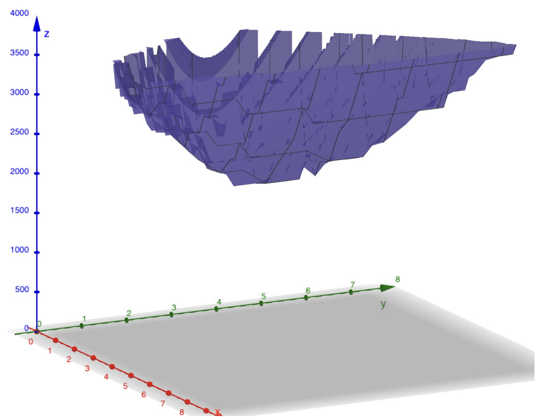
On a vu ci-dessus que k dépend de h et η. Le volume (5) permet d'exprimer h en fonction de C et c, donc a fortiori η aussi. On a

$$h = \frac{600}{C^2+Cc+c^2} \quad \text{et} \quad \eta = 2\sqrt{1+\frac{2400}{(C^2+Cc+c^2)^2(C-c)^2}} = 2\sqrt{1+\frac{2400}{(C^3-c^3)^2}}$$

On a donc une fonction de 2 variables C, c dont on veut trouver le minimum. Voici un tracé du graphe avec Geogebra (pour $x = C$ et $y = c$ avec bien sûr $c \leq C$).



On zoome un peu pour chercher le minimum



Puis on tâtonne pour trouver ce qui pourrait être le minimum. Pour $C = 4,5cm$ et $c = 2,8cm$, on trouve Aire $= 2160cm^2$, $h = 14,75cm$ et $\alpha = 4,68°$.

C'est nettement mieux que le double cylindre. De plus la forme est assez jolie, presque une flûte à champagne. Cela semble adapté pour une chaine hôtelière. Voici une image ressemblante (générée par IA, le fond du verre est plus épais que ce que nous voudrions)

Bien sûr, nous pouvons faire des calculs similaires avec des cônes tronqués. On peut aussi essayer d'autres formes rigolotes, comme un cône à base hexagonale. Cela ferait une jolie forme, et le placement se fait très bien comme nous l'avons vu en Section 3.3.

5 Conclusion

Nous avons réussi à comprendre beaucoup de choses sur les formes possibles, les calculs de volume et les problèmes d'empilement et de placement. Nous n'avons pas pu étudier toutes les formes possibles, mais comme deviné ou étudié par la plupart des classes participantes, nous avons vu que la forme en cône ou pyramide tronquée est très efficace.

Résumons pour la chaine hôtelière Kikagaku :

- Les prismes droits (cubes, cylindres) ne permettent pas d'emboiter les verres. On peut les empiler, mais c'est instable, et cela prendra un grand espace de stockage, de l'ordre de $6000cm^2$ de surface si les rangements font 40cm de haut.
- La forme de la cantine, en "double cylindre", permet de réduire l'espace de stockage, et d'emboiter correctement les verres. Un verre de diamètre environ 7cm et de hauteur 6,5cm pourra être stocké sur une surface d'étagère de $3760cm^2$ environ.

  Il est possible de réduire la surface de stockage à $3600cm^2$, mais les verres seront alors étranges, avec une hauteur de 3cm et un diamètre de 10cm. Cela nous semble inadapté.
- Les verres en pyramide à base carrée nous semblent les mieux adaptés à la demande formulée par la chaine hôtelière. Avec un carré de côté 4,5cm en haut et une hauteur de 14,75cm, ces verres sont élégants et peuvent être stockés sur une surface de $2160cm^2$ (dans des étagères de 40cm de haut). C'est le meilleur résultat que nous ayons obtenu. De plus, ces verres ont une forme élégante qui devrait plaire aux client.es.

Nous espérons que ces éléments permettront à la chaine Kikagaku de faire un choix éclairé, et qu'ils ont été utiles aux enseignant.es et élèves qui les ont lus.

Rendez vous l'année prochaine pour un nouveau problème Resco !!!