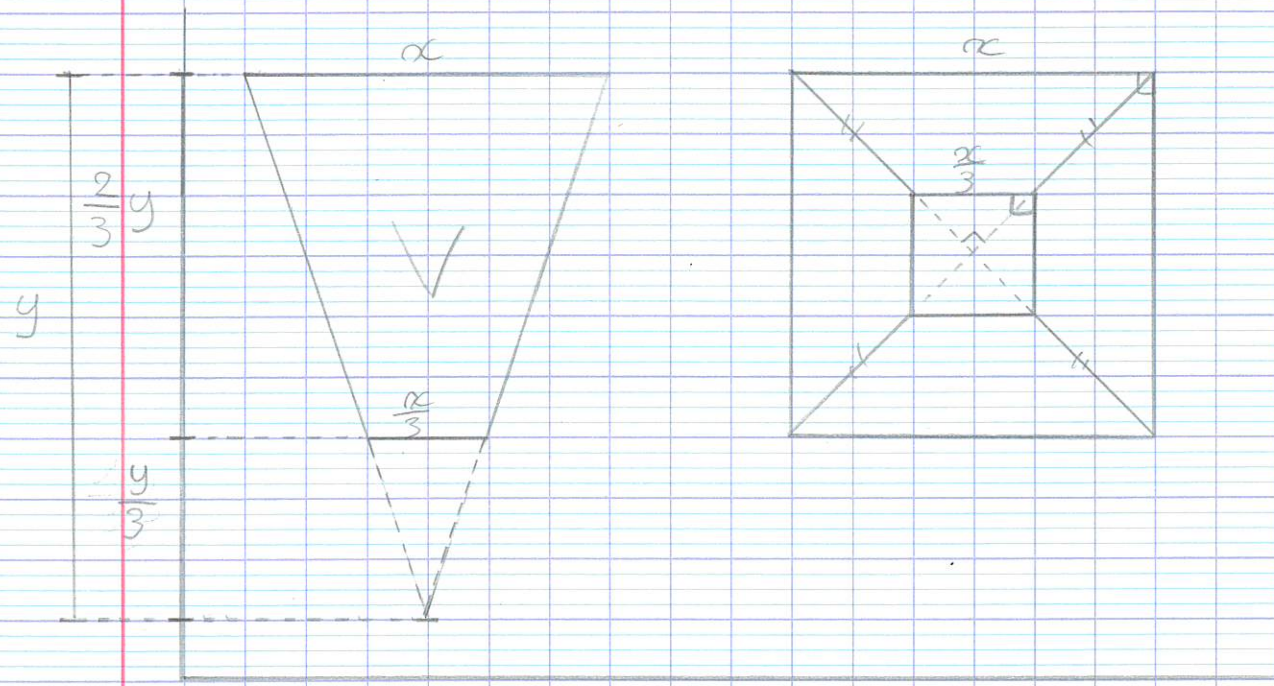
Benjamin Batt
Matthieu CHAPELAIN

Problème RESCO

La forme de verre que je propose est une pyramide à base carrée tronqué au deux tiers. Voici sa représentation théorique :



$V = 20$ cl , $V = 200$ cm^3

$$V = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} - \frac{\text{base}'' \times \text{hauteur}''}{3}$$

$$V = \frac{x^2 y}{3} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2 \times \frac{y}{3}}{3}$$

Nous allons choisir 10 centimètre de hauteur pour notre verre afin d'assurer son ergonomie.

$\frac{2}{3}y = 10$ cm

$y = 10 \div \frac{2}{3}$

$y = 10 \times \frac{3}{2}$

$y = \frac{30}{2}$

$y = 15$ cm

Nous pouvons désormais calculer la largeur du verre (x) grâce à cette équation :

$$\frac{15x^2}{3} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2 \times \frac{15}{3}}{3} = 200 \text{ cm}^3$$

$$15x^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 \times \frac{15}{3} = 600$$

$$\frac{15x^2}{1} - \frac{x^2}{9} \times 5 = 600$$

$$\frac{135x^2}{9} - \frac{5x^2}{9} = 600$$

$$\frac{130x^2}{9} = 600$$

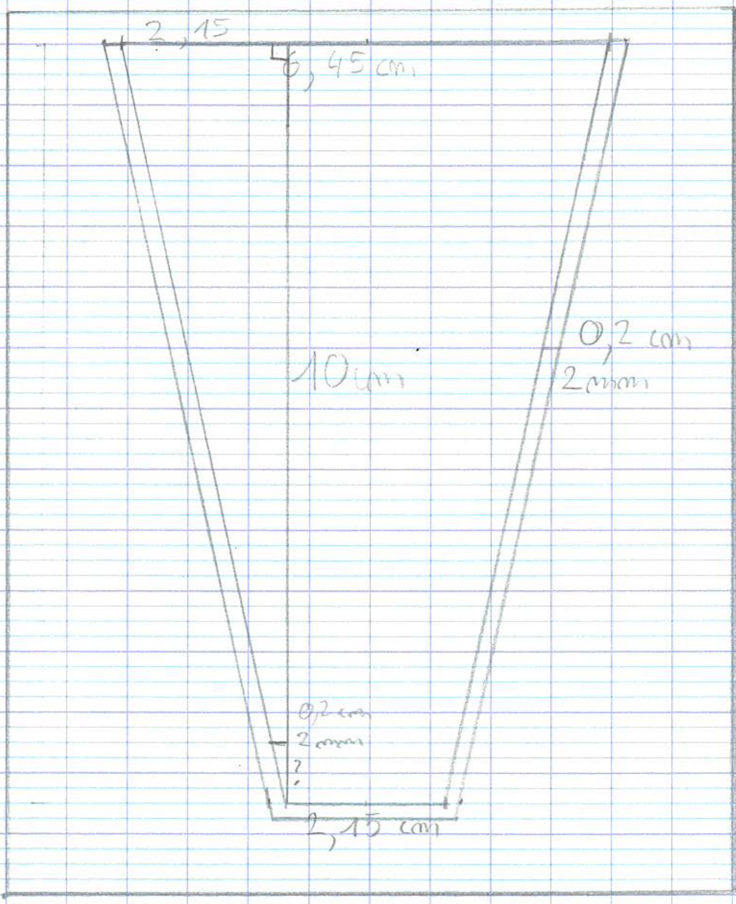
$$130x^2 = 5400$$

$$x^2 = \frac{5400}{130}$$

$$x^2 \simeq 41,54$$

$$x \simeq \sqrt{41,54}$$

$$x \simeq 6,45$$



Sur le shéma à droite, je représente mon verre et deux triangles imbriqués, ils représentent l'espace occupé par le verre seulement lors d'un empilement. Ici nous cherchons à connaître la longeur du côté du petit triangle ce qui représente l'espace vide entre les deux bases lorsque l'on empile deux verres. Grâce aux deux triangles imbriqués nous pouvons calculer cette longueur en utilisant le théorème de Talès :

$$\frac{2,15}{0,2} \& \frac{10}{?}$$ (produit en croix)

$$\frac{10 \times 0,2}{2,15} = 0,93 \text{ cm}$$

1 espacement entre les 2 bases est donc de 0,93 cm.

Grâce à cette information nous pouvons trouver le nombre maximum de verres dans une pile de 40 cm de hauteur :

$(x-1) \times 0,93 + 10,2 = 40$ cm

Ici, on ajoute l'espace de tous les verres sauf le dernier où on ajoute sa hauteur, en comptant les 2 mm d'épaisseur du verre.

$(x-1) \times 0,93 = 29,8$ $\quad x - 1 = 32,04$

$x - 1 = \frac{29,8}{0,93}$ $\quad x = 33,04$

Ensuit on tronque le résultat car on ne peut pas empiler des fractions de verres :

33,04 → 33

On sait maintenant qu'une pile de 33 verres ne dépasserait pas 40 cm de hauteur.

Nous allons maintenant calculer le volume du placard qui accueillera les 1000 verres. Pour se faire, nous avons besoin de plusieurs informations.

- La hauteur de la pile de 33 verres :
$(33-1) \times 0,93 + 10,2$
$= 32 \times 0,93 + 10,2$
$= 29,76 + 10,2$
$= 39,96$ cm

- La largeur de la pile :
$6,45 + 2 \times 0,2$
$= 6,45 + 0,4$
$= 6,85$ cm

- Le nombre de piles de verre pour atteindre 1000 verres :
$\frac{1000}{33} = 30,3$ > Il y aura donc 31 piles

$33 \times 30 = 990$
$1000 - 990 = 10$
La dernière pile aura 10 verres

Le placard étant un pavé droit, la dernière pile occupe le même espace que les autres.
Calculons le volume minimal du placard :
$V_{placard} = V_{pile} \times 31$
$V_{pile} = base \times hauteur$
$base = largeur^2$
$V_{placard} = largeur^2 \times hauteur \times 31$
$V_{placard} = 6,85^2 \times 39,96 \times 31$
$V_{placard} = 46,9225 \times 1238,76$
$V_{placard} = 58125,7161$ cm^3

$V_{pile} = 6,85^2 \times 39,96$
$= 1875,0231$ cm^3

Le volume minimale du placard est de $58,1$ dm^3.